4. Určete čtyři čísla tak, aby první tři tvořila tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -3$ a poslední tři tvořila tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1/2$.

Rozhodněte, zda platí:

- ~~(a)~~ Úloha má více než jedno řešení.
- ~~(b)~~ Existuje řešení, kde jsou všechna čtyři čísla celá.
- (c) Existuje řešení, pro které je součet všech čtyř čísel 19,5.
- (d) Existuje řešení, pro které je podíl prvního a čtvrtého čísla roven druhému číslu.
- (e) Pro každé řešení platí, že součin prvního a čtvrtého čísla je menší než součin druhého a třetího čísla.

4. Jediné řešení je 9, 6, 3, 3/2.
Správné odpovědi: c, d, e.

Hledáme posloupnost $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$

$a_2 = a_1 - 3$ $\quad$ $a_3 = a_2 - 3 = a_1 - 6$

$a_3 = \frac{1}{2} \cdot a_2$ $\quad$ $a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{4} a_2$

$a_2 - 3 = \frac{1}{2} a_2 \Rightarrow \frac{1}{2} a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 6$

$6 = a_1 - 3 \Rightarrow a_1 = 9$ $\quad$ $a_3 = 3$

Konečně $a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{3}{2}$ $\quad$ $a_4 = \frac{3}{2}$

$(9, 6, 3, \frac{3}{2})$

$d = -3$ AP $\quad$ GP $q = \frac{1}{2}$

$\frac{9}{\frac{3}{2}} = \frac{18}{3} = 6$

$9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} < 18$

---

4. Prvních šest členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje následující dvě podmínky:

$$a_1 - a_2 + a_3 = 9 \qquad (1)$$
$$a_4 - a_5 + a_6 = 72 \qquad (2)$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ je větší než 180.
- ~~(b)~~ $a_6 > 100$
- (c) $a_5 = 48$
- ~~(d)~~ $a_2 = 2$
- (e) $a_1 + a_6 < 100$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

(1) $a_1 - a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 9$

(2) $a_1 q^3 - a_1 \cdot q^4 + a_1 q^5 = 72$

(2) $q^3 (a_1 - a_1 q + a_1 q^2) = 72$

$q^3 \cdot 9 = 72 \quad q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

(1) $a_1 - 2a_1 + 4a_1 = 9$

$3a_1 = 9$

$a_1 = 3$

$a_6 = 3 \cdot 2^5 =$
$= 3 \cdot 32 = 96$

$a_5 = \frac{1}{2} a_6 = 48$ ✓

$a_1 + a_6 = 3 + 96$

Součty geometrické řady

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ... geometrická posl.

Chceme spočítat $\sum_{n=1}^{N} a_n =: s_N$

s_N ... N-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$s_N = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N =$$

$$= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{N-1} =$$

$$= a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1})$$

TRIK: $a^n - b^n =$

$$= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$= a^n - a^{n-1}b + a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + \dots\ a^2b^{n-2} - ab^{n-1} + ab^{n-1} - b^n$$

Speciálně platí pro $q \neq 1$

$$q^N - 1^N = (q-1)(q^{N-1} + q^{N-2} + \dots + q + 1)$$

$$\frac{q^N - 1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1}$$

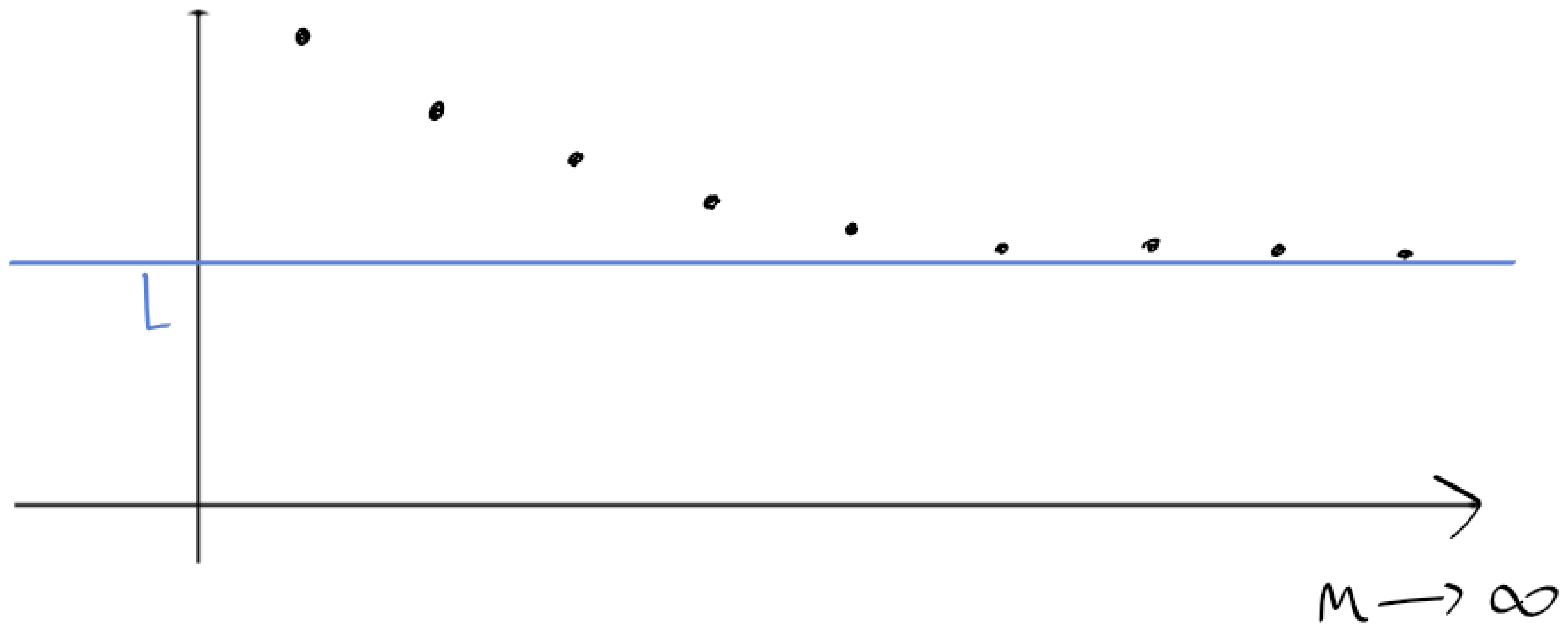
$$s_N = a_1 \cdot \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

Pro řadu $a_1 = 3$, $q = 2$:

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = s_6 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{64-1}{2-1} =$$

$$= 3 \cdot 63 = \underline{\underline{189}}$$

Součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován jako limita posloupnosti částečných součtů.



Posloupnost částečných součtů („mezisoučty")

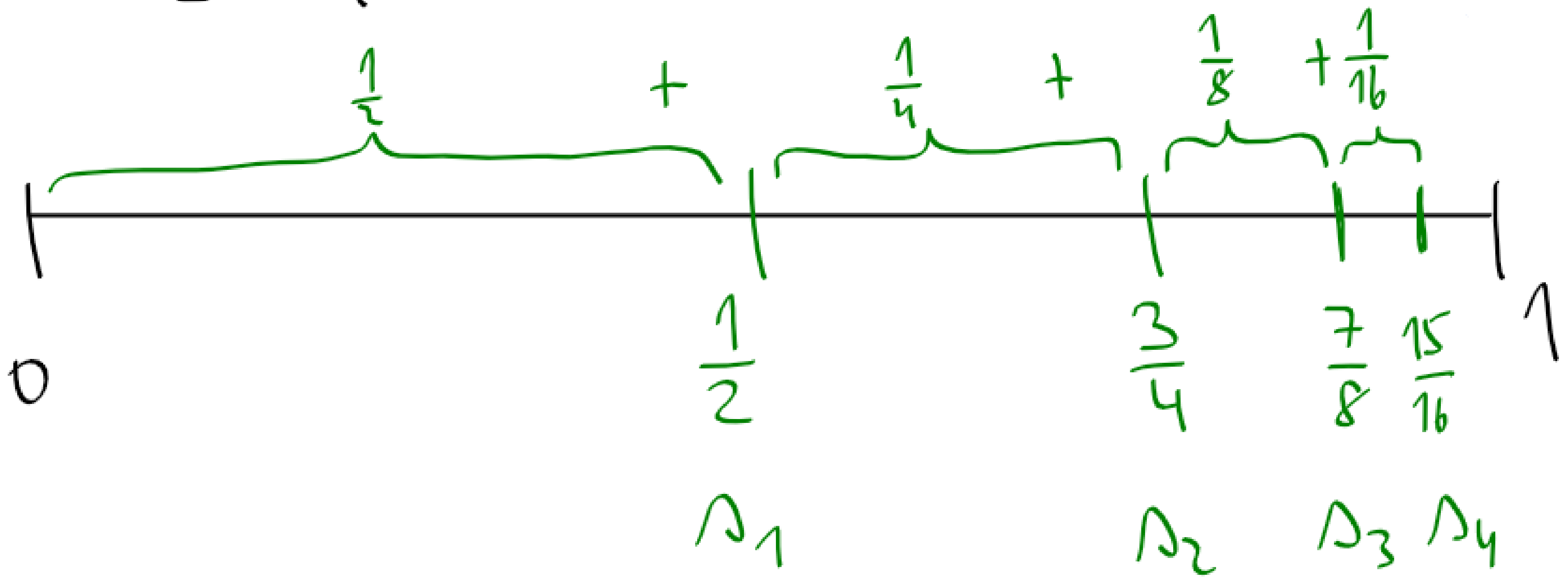
$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N .$$

Definujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} s_N = \lim_{N \to \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_N)$,

pokud tato limita existuje.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



Je (intuitivně) zřejmé, že $\lim_{N \to \infty} s_N = 1$,

neboli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Součet $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. (nechť $q \neq 1$)

$$1+q+q^2+\dots+q^{N-1} = \frac{q^N-1}{q-1} \quad \dots \text{víme}$$

Tedy

$$1+q+q^2+\dots+q^N = \frac{q^{N+1}-1}{q-1} \quad \dots \text{víme}.$$

$$\| $$

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$$

Chceme znát $\lim_{N\to\infty} s_N$.

$\forall q : |q|<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \frac{q^{N+1}-1}{q-1} =$$

$(-1)^n$:

n	0	1	2	3	4	
$(-1)^n$	1	-1	1	-1	1	...

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{q-1}\left(q^{N+1}-1\right) =$$

Platí-li (a)

$$= \frac{1}{q-1} \cdot \lim_{N\to\infty}\left(\underbrace{q^{N+1}}_{\to 0}-1\right) = \frac{1}{q-1}(0-1) = \frac{1}{1-q}$$

a) $|q|<1$, pak $q^{N+1} \to 0$.

Důkaz je snadný z definice, ale vynecháme ho.

$q = \frac{4}{5}$ $\quad 1, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{25}, \dots$

b) $|q|>1$ — b1) $q>1$, pak $q^{N+1} \nearrow \infty$.

b2) $q<-1$, pak q^{N+1} „víc a víc osciluje"

takže posl. nemá limitu

c) $|q|=1$ ... c1) $q=1$ .. $\sum q^n = \infty$ c2) $q=(-1)$ osciluje

Příklady: • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

Zajímá nás konečnost (případně hodnota) součtu této řady.

TRIK: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

Tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$

$s_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}$

$= 1 - \frac{1}{N+1} = s_N$

$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\to 0}\right) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}.$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (netriviální!)

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, kde $0! = 1$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$

Platí $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e} \doteq 2{,}718281828\ldots$

není periodický

Rekurentní ⇝ explicitní předpis.

Příklad: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$

$$a_{n+1} = \frac{4}{3}(a_n + a_{n-1})$$

Explicitní vzorec pro $a_n = ?$

n	1	2	3	4	5	
a_n	2	4	8	16	32	...

Jestlipak platí $a_n = 2^n$?

Zkusme to dokázat mat. indukcí.

$n = 1$: $a_1 \overset{?}{=} 2^1$ platí!

$n \to n+1$: nechť vzorec platí ~~pro~~ až po n n.

Chceme dokázat jeho platnost pro $n+1$.

náš indukční předp. (I.P.) je $a_n = 2^n$, $a_{n-1} = 2^{n-1}$.

Chceme dokázat: $a_{n+1} = 2^{n+1}$.

Důkaz: $a_{n+1} = \frac{4}{3}(a_n + a_{n-1}) =$

$$\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{4}{3}\left(2^n + 2^{n-1}\right) = \frac{4}{3}\left(2\cdot 2^{n-1} + 2^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 2^{n-1}(2+1) = 2^{n+1}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3 = 2^{n+1}. \boxtimes$$

Tedy skutečně $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = 2^n$.

4. Pro jistou aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí vztahy

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100, \quad (1)$$
$$a_{101} + a_{102} + \cdots + a_{200} = 200. \quad (2)$$

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

(a) Všechny členy dané posloupnosti jsou kladné.
(b) $a_1 < 0{,}5$.
(c) $a_1 + a_{200} > a_{100} + a_{101}$. rovnost!
(d) $a_{100} < 1{,}5$. $a_{100} = 0{,}505 + \frac{99}{100}$
(e) $a_2 - a_1 = 0{,}01 = d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$(1)\quad a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+99d) = 100$$
$$(2)\quad (a_1+100d) + (a_1+101d) + \ldots + (a_1+199d) = 200$$

$$(1)\quad 100a_1 + d + 2d + \ldots + 99d = 100$$
$$(1)\quad 100a_1 + d\cdot(1+2+3+\ldots+99) = 100$$

$$(2)\quad 100a_1 + d\,(100+101+\ldots+199) = 200$$

OBECNÝ VZOREC: (a_i) aritmetická

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \frac{a_1 + a_N}{2}\cdot N$$

$$\sum_{i=1}^{99} i = \frac{1+99}{2}\cdot 99 = 99\cdot 50 = 100\cdot 50 - 50 = 4950$$

$$\sum_{i=100}^{199} i = \frac{100+199}{2}\cdot 100 = 299\cdot 50 = 300\cdot 50 - 50 = 14950$$

$$(1):\quad 100\cdot a_1 + d\cdot 4950 = 100$$
$$(2):\quad 100\,a_1 + d\cdot 14950 = 200$$

$$(1)-(2):\quad -10000\,d = -100 \qquad \boxed{d = \frac{1}{100}}$$

$$(1):\quad 100\,a_1 + \frac{4950}{100} = 100 \quad /\cdot 100$$

$$10000\,a_1 = 5050 \qquad \boxed{a_1} = \frac{5050}{10000} = \frac{505}{1000} = \frac{101}{200} = \boxed{0{,}505}$$